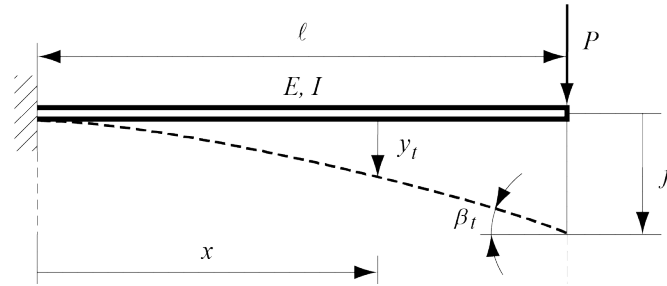


Mécanique des structures



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

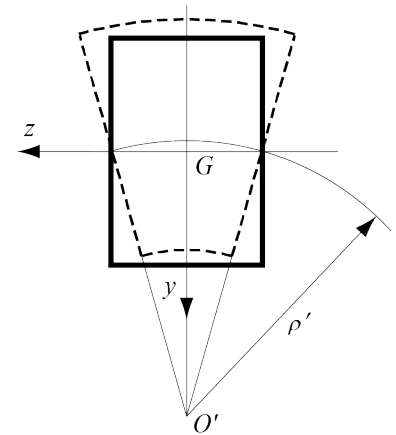
Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

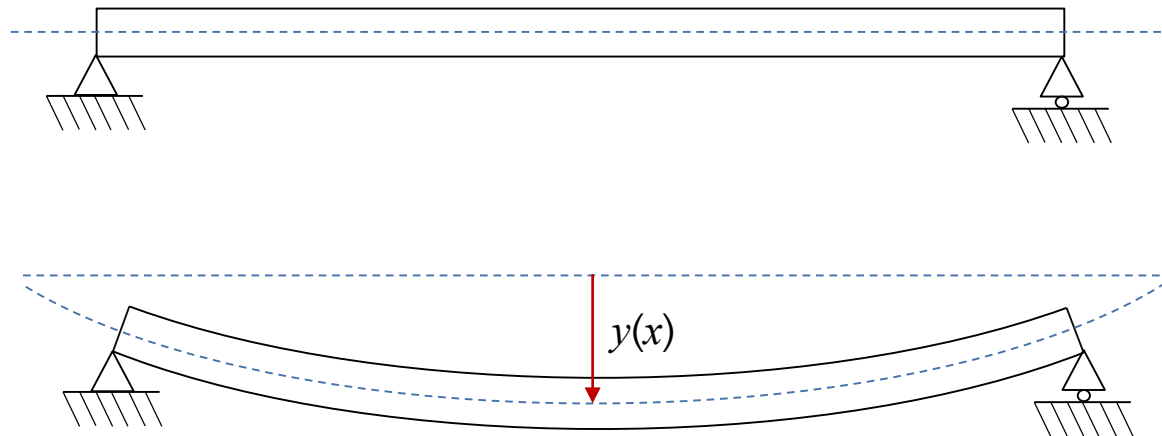
Rappel



La déformation transverse $y(x)$ de l'axe neutre d'une poutre est décrite par une fonction $y(x)$ appelée la **flèche de la poutre**

Objectifs :

- Pouvoir définir la flèche d'une poutre
- Calculer la flèche pour des cas simples en utilisant les relations différentielles entre flèche et moment interne de flexion



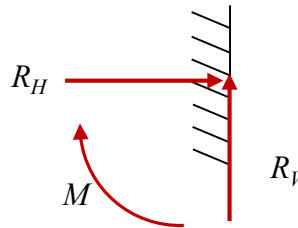
Conditions de bords:

Liaisons méca. ext. planes

Schéma

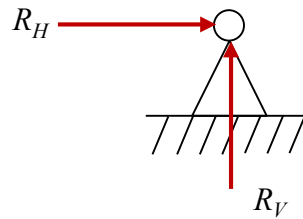
Conditions de bords

Encastrement



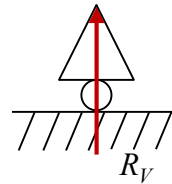
$$y = y' = 0$$

Articulation



$$y = y'' = 0$$

Appui simple



$$y = y'' = 0$$

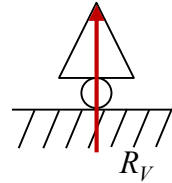
Conditions de bords:

Liaisons méca. ext. planes

Schéma

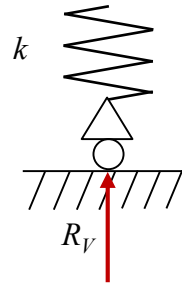
Conditions de bords

Appui simple



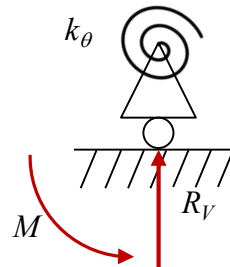
$$y = y'' = 0$$

Appui souple (translation)



$$y = \frac{R_v}{k}$$
$$y'' = 0 \quad (M = 0)$$

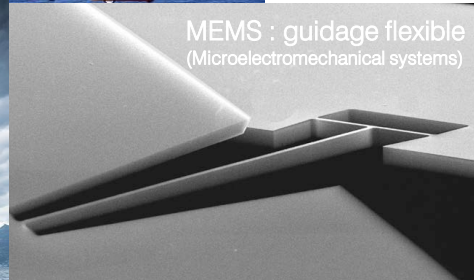
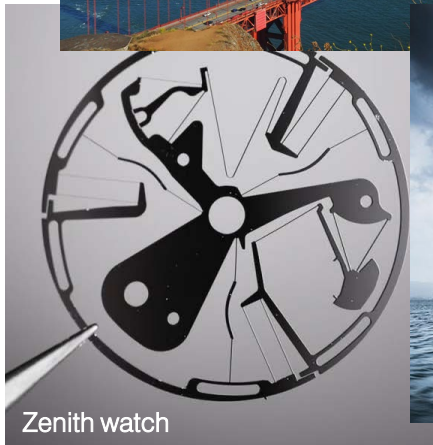
Appui flexible (flexible)



$$y = 0$$
$$y' = \frac{M}{k_\theta} = \frac{-y''EI}{k_\theta}$$

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Démarche et applications



MEMS : guidage flexible
(Microelectromechanical systems)

Calcul des contraintes
pour des structures
«simple»

Des mathématiques
vers la physique

Application des
équations à des
problèmes de poutre

Cours d'Analyse:
Équation différentielles

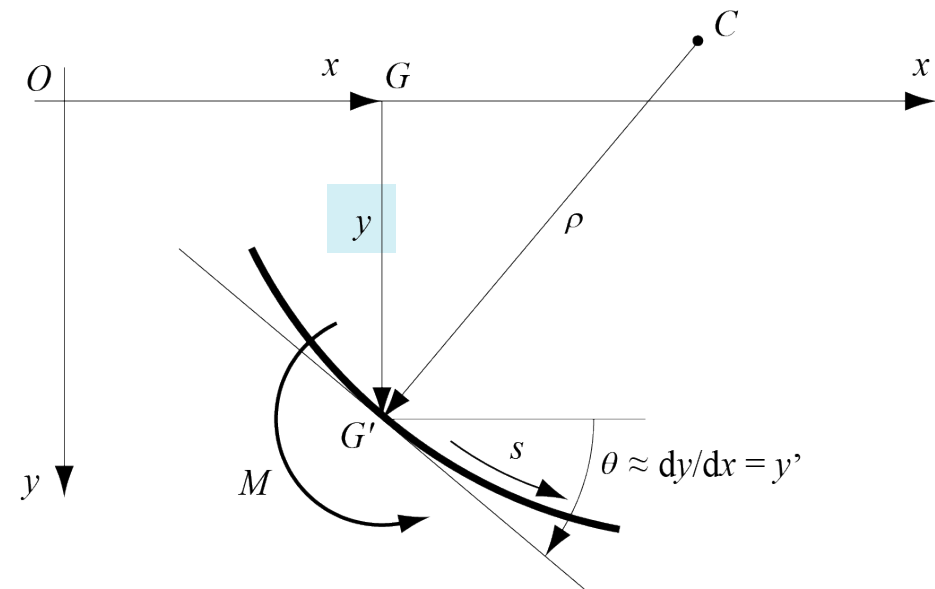
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Déformée et flèche

Après déformation, la ligne moyenne d'une poutre soumise à la flexion est appelée la **déformée** : $y(x)$ de la poutre.

La **flèche** en un point de la poutre est la valeur particulière de la déformée en ce point.

Considérons le centre de gravité $G(x, 0)$ d'une poutre droite soumise à la flexion simple. La déformation entraîne un déplacement transversal y ainsi qu'un déplacement longitudinal du second ordre que l'on néglige⁽¹⁾.



⁽¹⁾ Cette approximation doit être abandonnée dans le cas des lames minces et longues, ainsi que dans le cas des poutres courbes

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

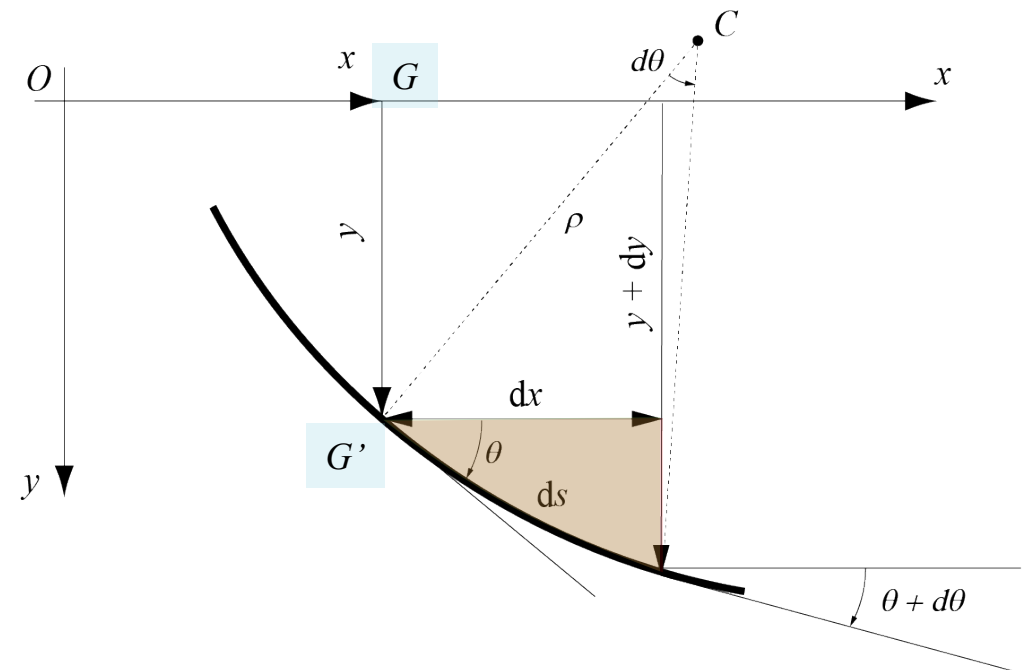
Équation différentielle sous l'influence du moment de flexion

Sous l'effet du moment de flexion, le point $G(x, 0)$ se déplace au point $G'(x, y)$ où la courbure a pour valeur ([voir ch. 6](#))

- $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

En fonction de la dérivée première y' et de la dérivée seconde y'' , la courbure est exprimée par

- $$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \pm \frac{d\theta}{ds} \\ &= \pm \frac{d(\tan^{-1} y')}{dx} \frac{dx}{ds} \\ &= \pm \frac{1}{1+y'^2} \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{(dx^2+dy^2)^{1/2}} \\ &= \pm \frac{1}{1+y'^2} \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{dx(1+y'^2)^{1/2}} \\ &= \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

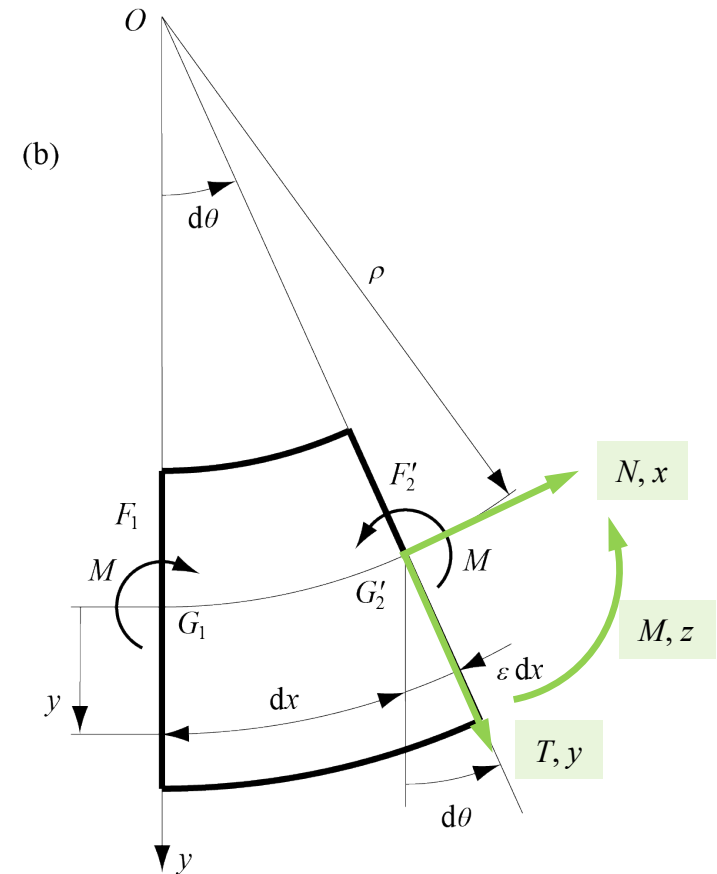
Équation différentielle sous l'influence du moment de flexion

Sous l'hypothèse des petites déformations, la dérivée y' est très faible, de sorte que le terme $(y')^2$ peut être négligé vis-à-vis de l'unité

- $$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \cong \pm y''$$

En prenant en compte la convention de signe adoptée pour un repère gauche (le moment de flexion M est positif si les fibres situées du côté des y positifs sont tendues). La dérivée seconde de la déformée y due au moment de flexion s'écrit donc finalement.

- $$y'' = -\frac{M}{EI}$$

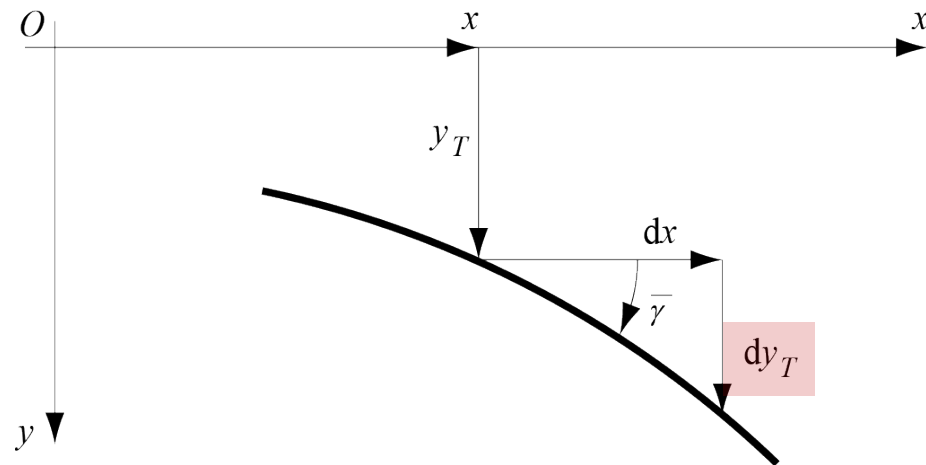
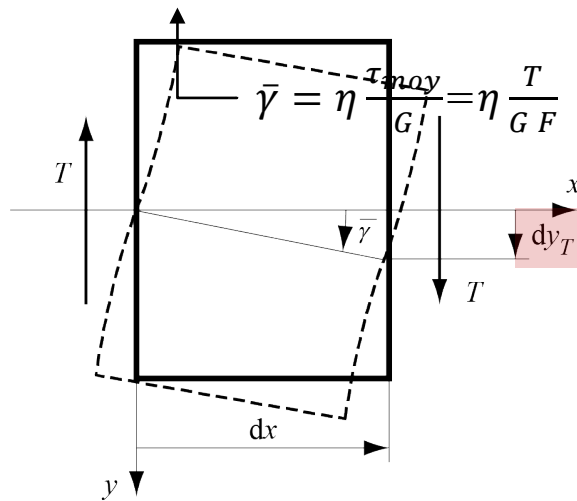


Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Équation différentielle sous l'influence de l'effort tranchant

L'effort tranchant provoque, sur une longueur dx , un déplacement dy_T de la ligne moyenne, proportionnel à l'angle de glissement global $\bar{\gamma}$ (voir ch. 6)

- $dy_T = \bar{\gamma} dx = \eta \frac{T}{GF} dx$



On en déduit l'équation différentielle du premier ordre de la déformée y_T due à l'effort tranchant comme étant

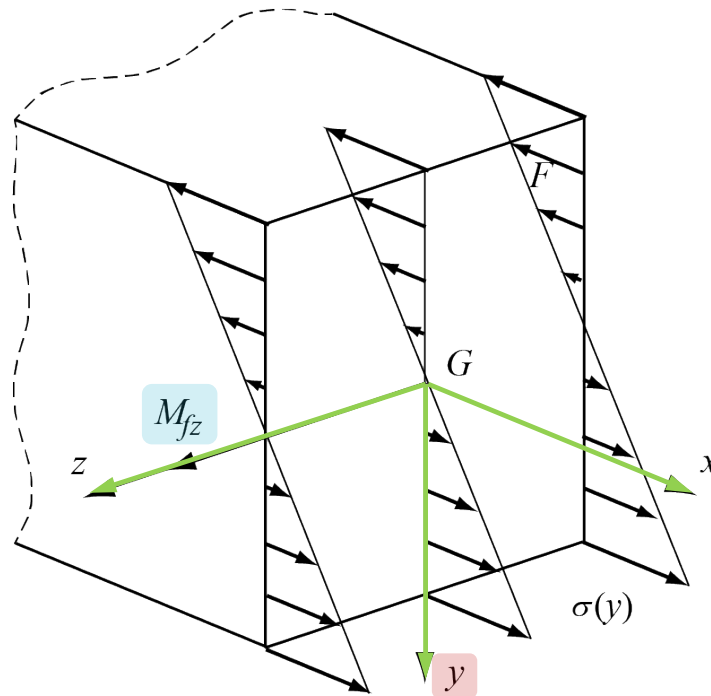
- $y'_T = \eta \frac{T}{GF}$

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Convention de signe et référentiel

Le choix d'un trièdre de référence gauche découle de la convention habituellement adoptée en statique selon laquelle le moment de flexion est admis positif quand il provoque une traction dans les fibres situées du côté des y positifs.

Dans le cas représenté dans ce chapitre nous avons un moment de flexion M_{fz} perpendiculaire au plan G_{xy}

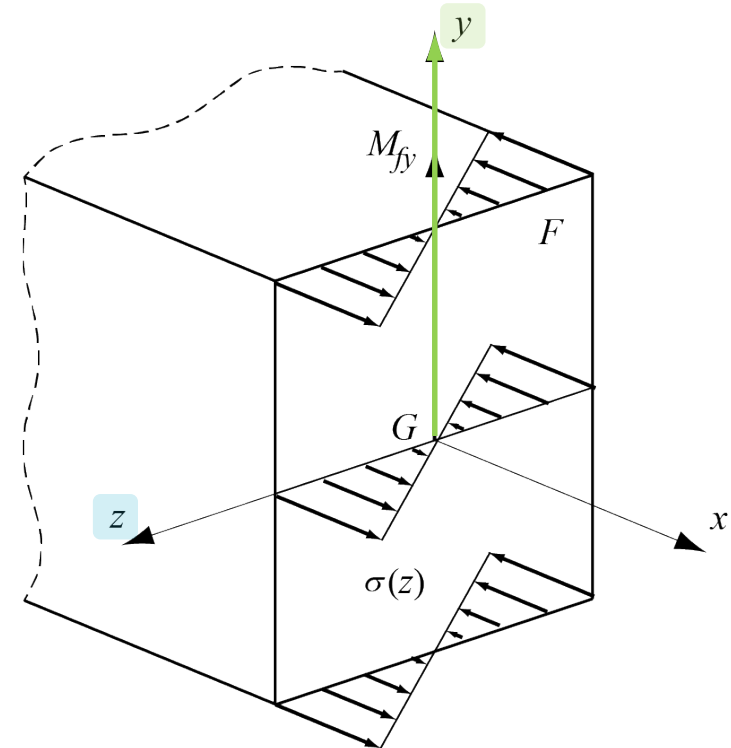
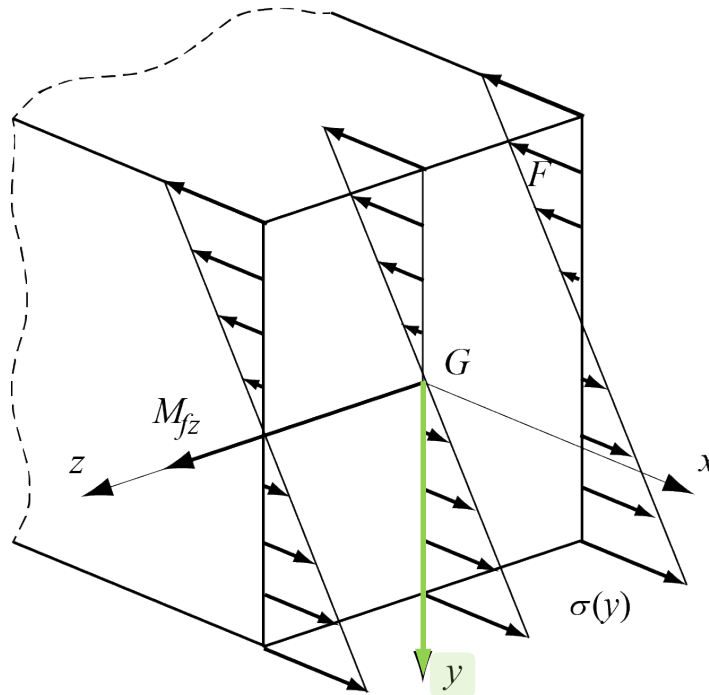


Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Convention de signe et référentiel

Si l'on considère une composante M_{fy} perpendiculaire un plan G_{yz} , on aurait recours à un trièdre de référence droite pour assurer que les fibres situées du côté des z positifs soient en traction.

Par conséquent, la convention de signe est, pour l'une des deux directions, violée dans les poutre tridimensionnelles soumises simultanément aux moments de flexion M_{fy} et M_{fz}



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1

Chercher la déformée d'une poutre en console de section rectangulaire supportant une force ponctuelle en son extrémité libre

Données numériques

$$P = 30 \text{ kN}$$

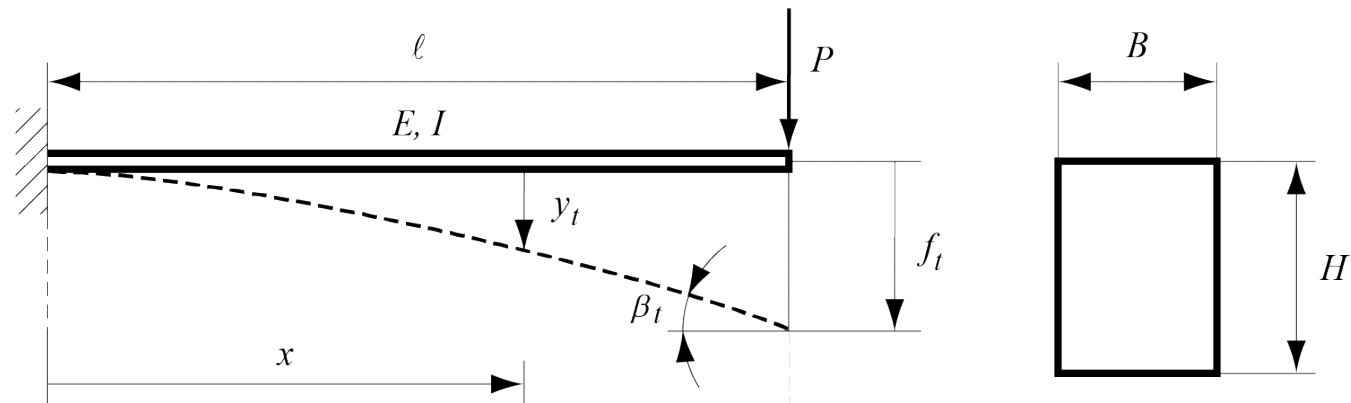
$$\ell = 1 \text{ m}$$

$$H = 10 \text{ cm}$$

$$B = 5 \text{ cm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$



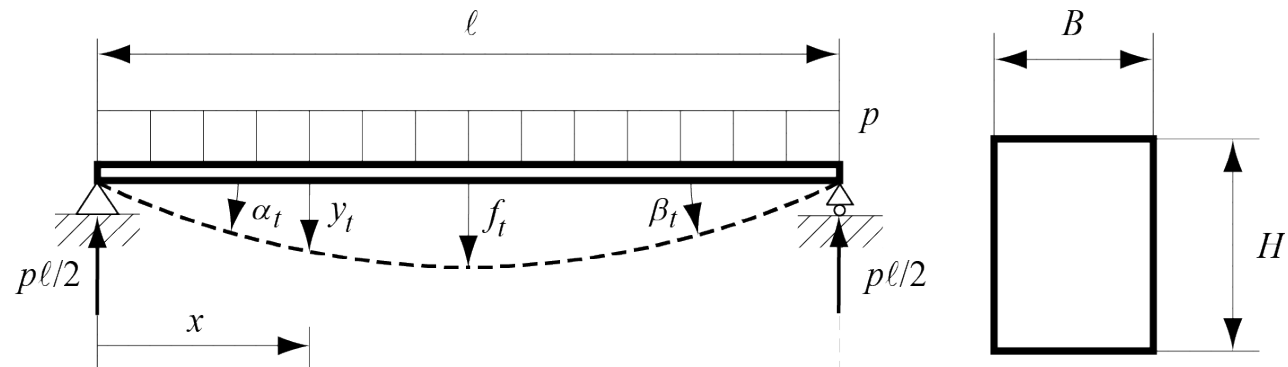
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2

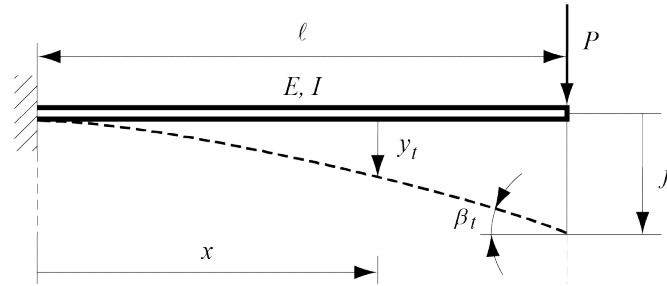
Chercher la déformée d'une poutre sur deux appuis simples de section rectangulaire supportant une charge uniformément répartie.

Données numériques

$$\begin{aligned} p &= 200 \text{ kN/m} \\ \ell &= 1 \text{ m} \\ H &= 10 \text{ cm} \\ B &= 5 \text{ cm} \\ E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ G &= 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$



Mécanique des structures



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1

Chercher la déformée d'une poutre en console de section rectangulaire supportant une force ponctuelle en son extrémité libre

Données numériques

$$P = 30 \text{ kN}$$

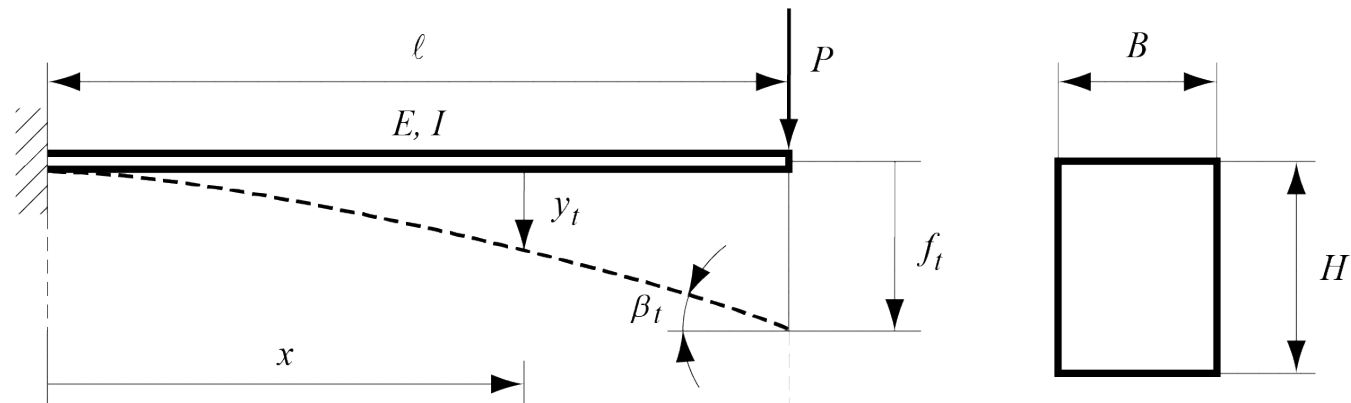
$$\ell = 1 \text{ m}$$

$$H = 10 \text{ cm}$$

$$B = 5 \text{ cm}$$

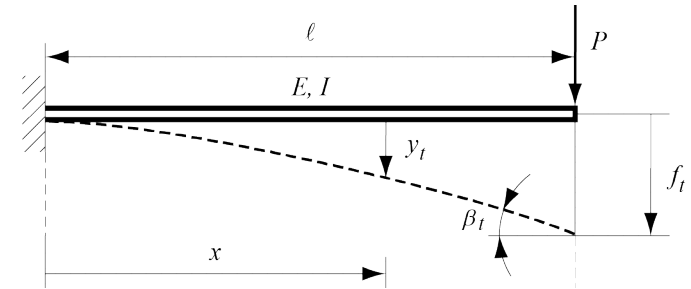
$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$



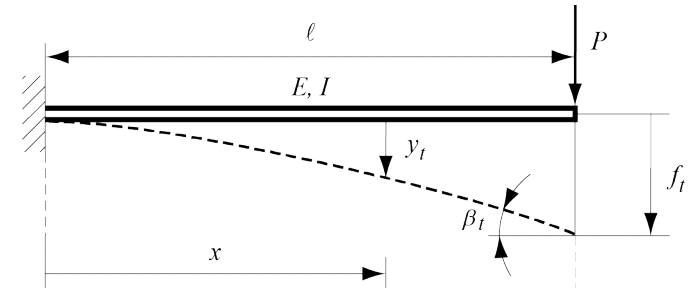
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1



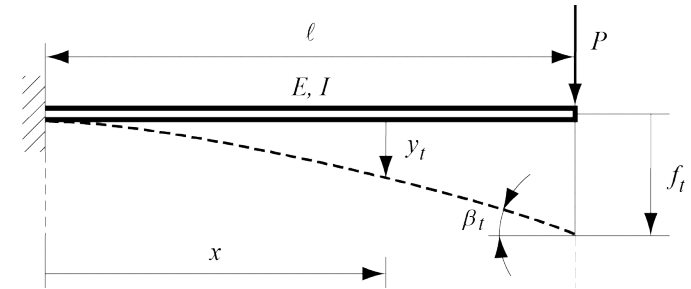
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1



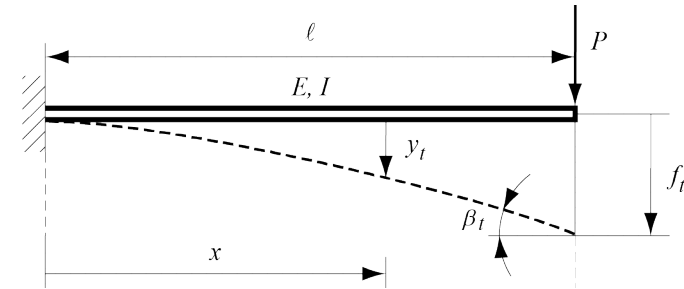
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1



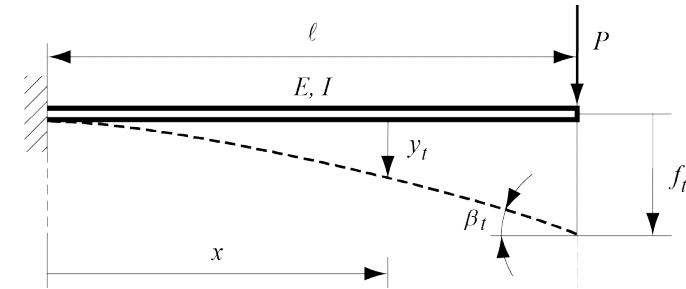
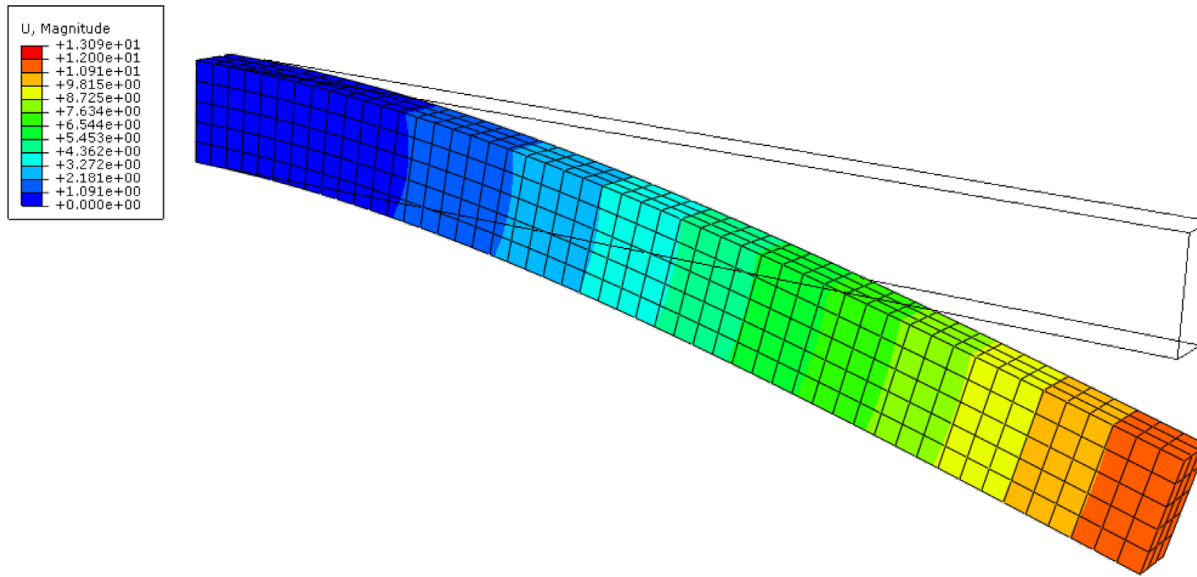
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

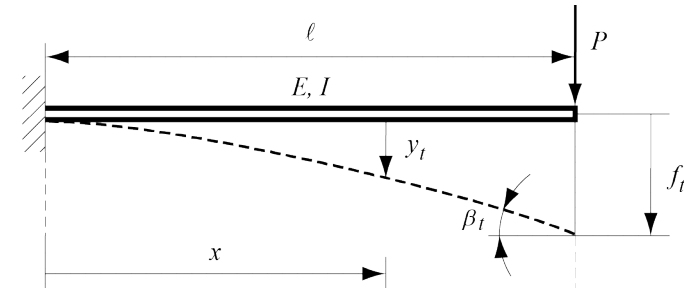
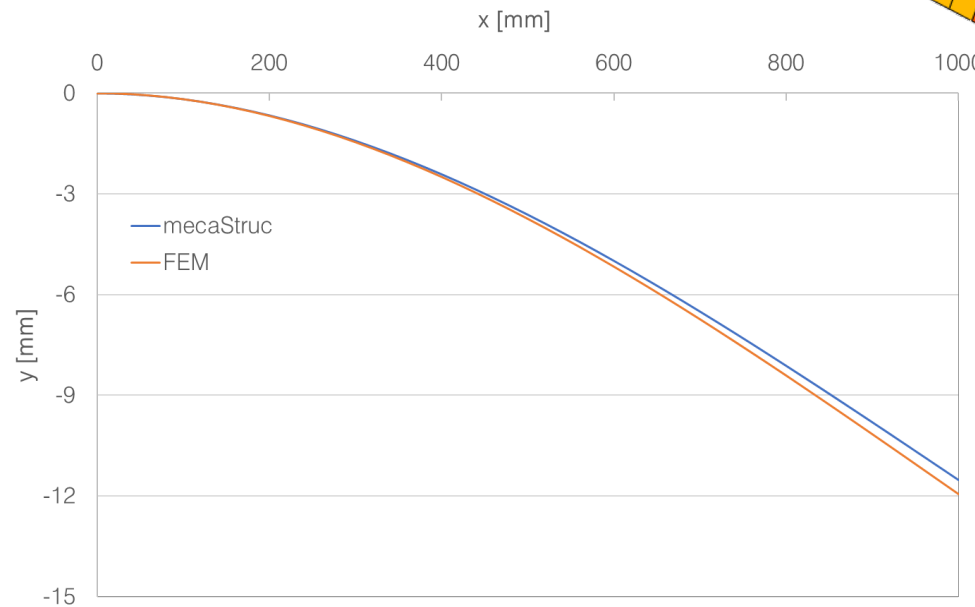
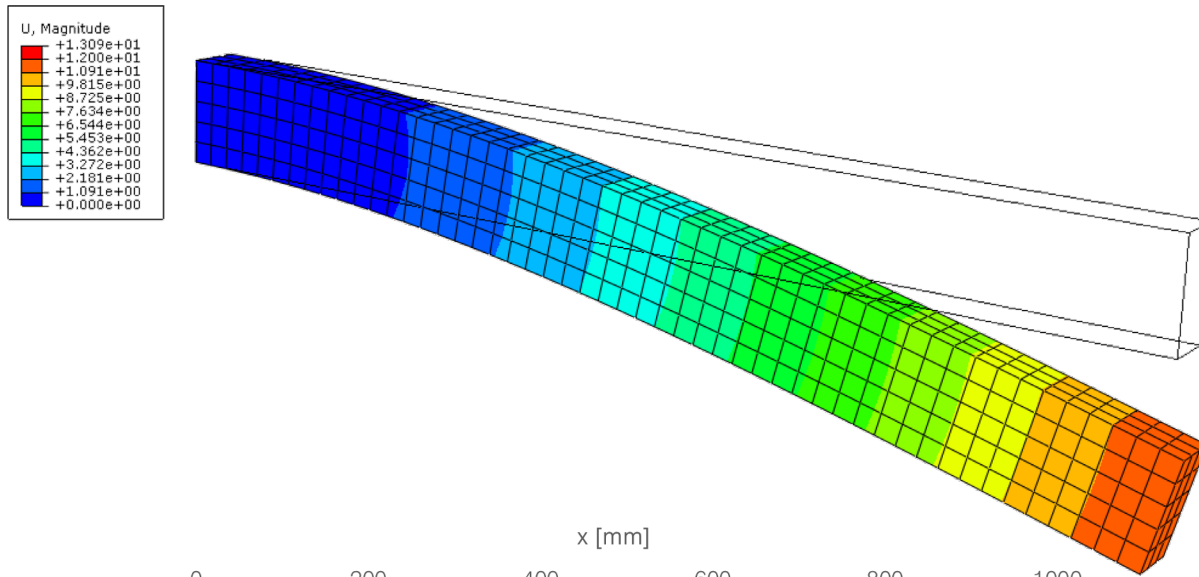
Problème 7.1



Flèche	FEM-lin	FEM-quad	MecaStruc
δ	13.09	11.5	
y	11.94	11.47	11.4 + 0.09

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.1



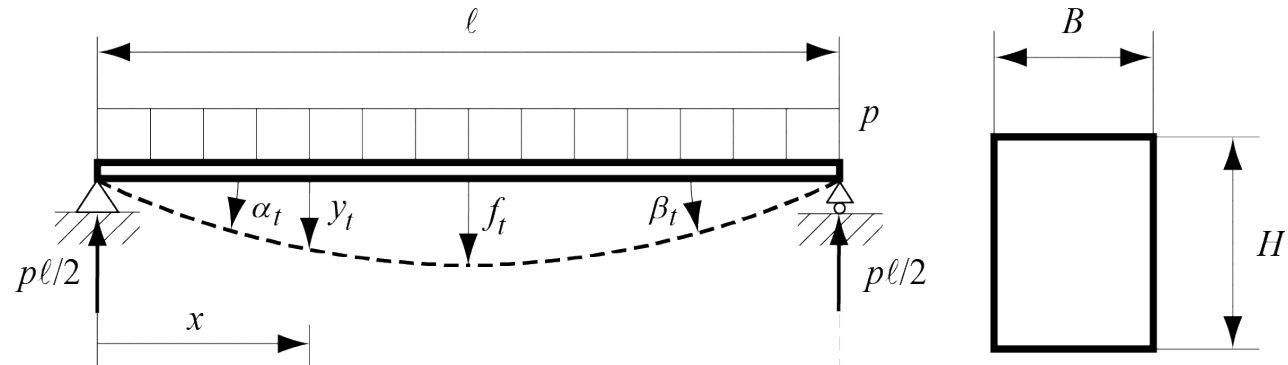
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2

Chercher la déformée d'une poutre sur deux appuis simples de section rectangulaire supportant une charge uniformément répartie.

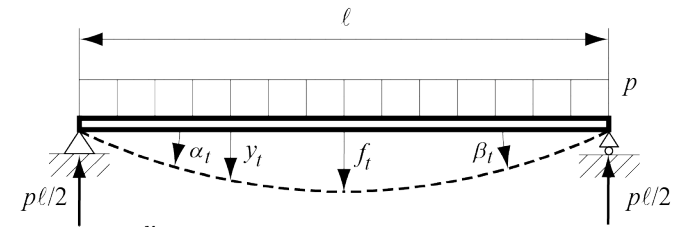
Données numériques

$$\begin{aligned} p &= 200 \text{ kN/m} \\ \ell &= 1 \text{ m} \\ H &= 10 \text{ cm} \\ B &= 5 \text{ cm} \\ E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ G &= 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$



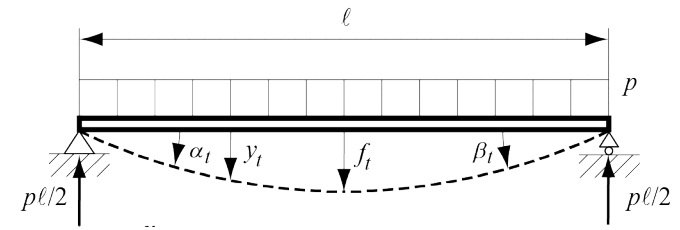
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2



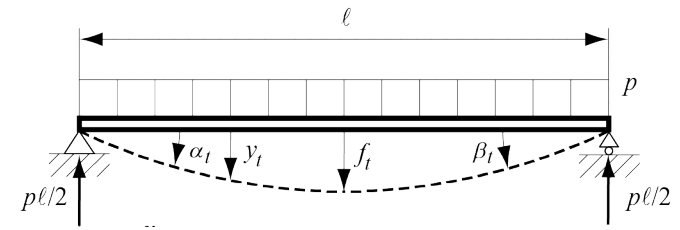
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2



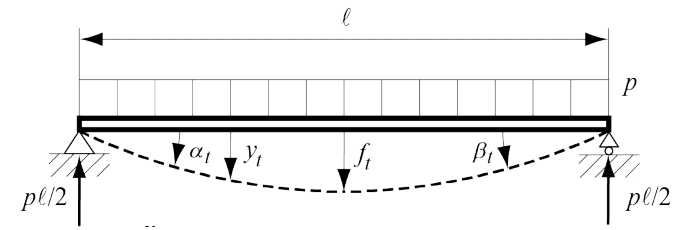
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2

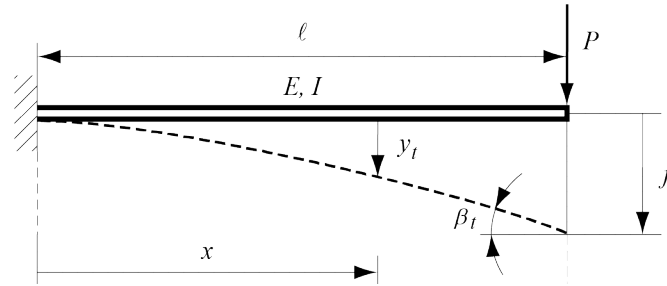


Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.2



Mécanique des structures



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

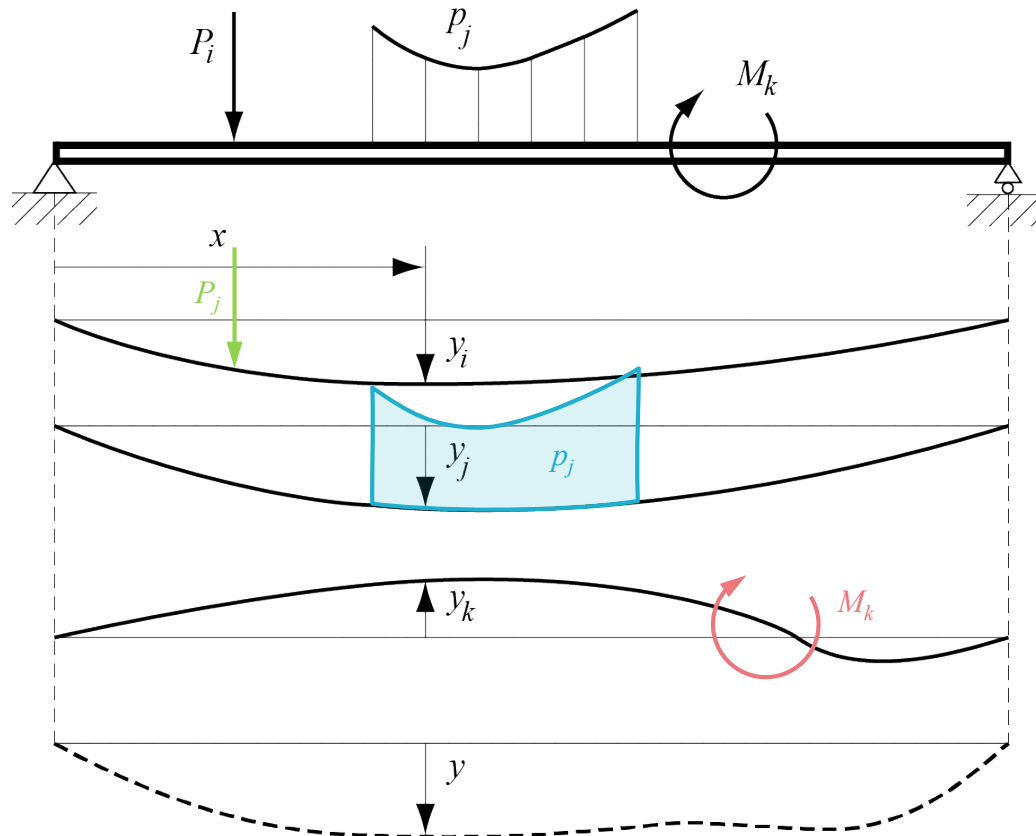
Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Superposition des déformations

En vertu du *principe de superposition des efforts intérieurs*, le moment total M en tout point de la ligne moyenne d'une poutre soumise à un cas de charge complexe, comprenant des forces concentrées, des charges réparties et des moments appliqués, est la somme des moments partiels dus à chacune des contributions.



En vertu du *principe de superposition des efforts intérieurs*, le moment total M en tout point de la ligne moyenne d'une poutre soumise à un cas de charge complexe, comprenant des forces concentrées, des charges réparties et des moments appliqués, est la somme des moments partiels dus à chacune des contributions.

En présence de m forces concentrées P_i , n charges réparties p_j et q moments M_k le moment total résultant a ainsi pour expression

- $$M = \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{j=1}^n M_j + \sum_{k=1}^q M_k$$

où les composantes M_i et M_j sont les moments associés respectivement à la force concentrée P_i et à la charge répartie p_j .

Les contraintes provoquées par le moment total M sont également la somme des contraintes dues à chaque moment partiel, conformément au *principe de superposition des contraintes*.

Enfin, dans le **domaine de comportement linéaire des matériaux**, les déformations totales sont la somme des déformations partielles : c'est le *principe de superposition des déformations*.

La **courbure** de la déformée résultante est dès lors la somme des courbures partielles.

- $$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\rho_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_n} + \sum_{k=1}^q \frac{1}{\rho_k}$$

Toujours sous l'hypothèse que la pente de la déformée est faible ($y' \ll 1$), la somme des courbures peut être remplacée par la **somme des dérivées secondes** y''

- $$y'' = \sum_{i=1}^m y_i'' + \sum_{j=1}^n y_j'' + \sum_{k=1}^q y_k''$$

Chaque dérivée seconde étant proportionnelle au moment correspondant, cette relation peut, selon le résultat, être explicitée sous la forme

- $$y'' = - \sum_{i=1}^m \frac{M_i}{EI} - \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{EI} - \sum_{k=1}^q \frac{M_k}{EI}$$

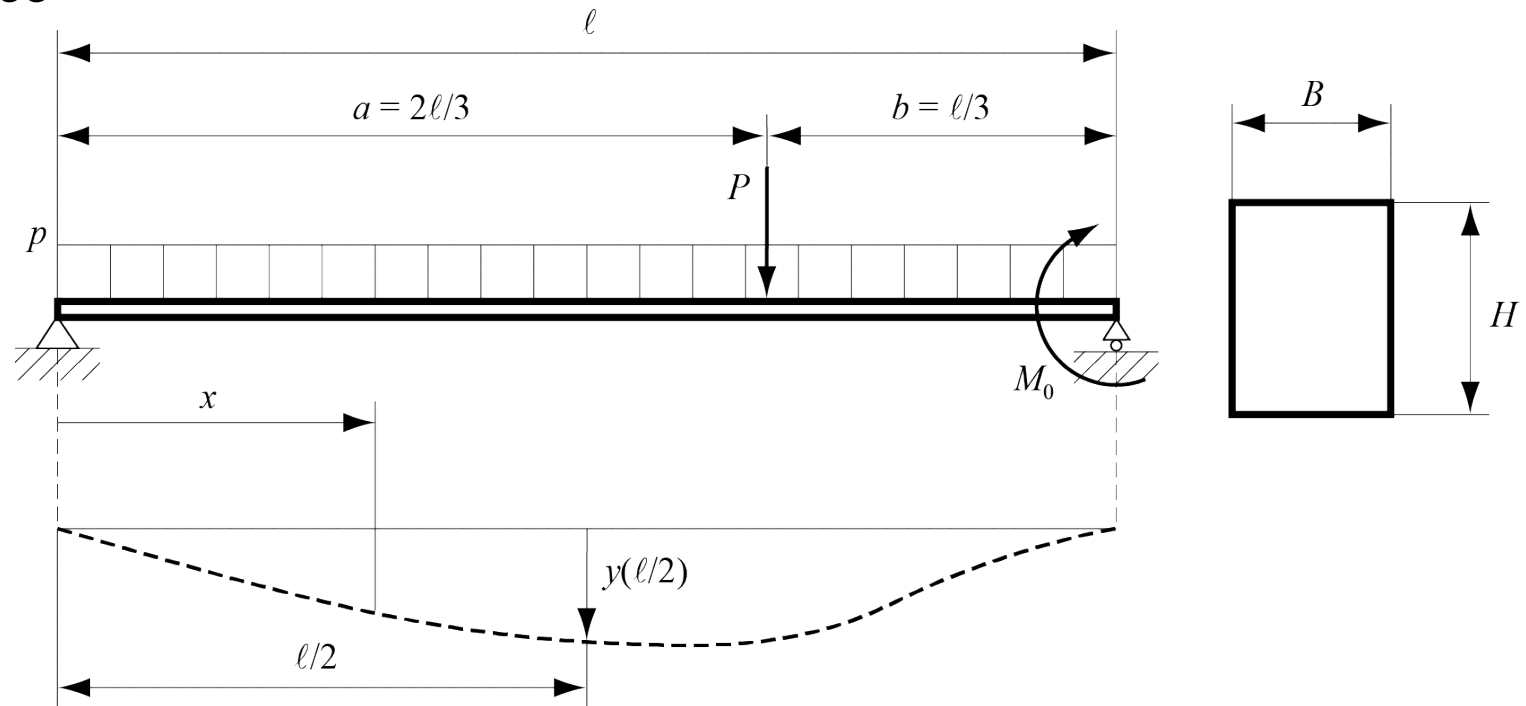
Enfin, comme les conditions aux limites sont les mêmes pour toutes les déformées partielles d'une même poutre, la **déformée totale** est la somme des déformées partielles

- $$y = \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{k=1}^q y_k$$

En appliquant le principe de superposition et en ne considérant que l'influence du moment de flexion, calculer la flèche au centre d'une poutre de section rectangulaire soumise au cas de charge suivant :

Données numériques

$$\begin{aligned} P &= 40 \text{ kN} \\ p &= 100 \text{ kN/m} \\ M_0 &= 12 \text{ kNm} \\ \ell &= 1 \text{ m} \\ H &= 10 \text{ cm} \\ B &= 5 \text{ cm} \\ E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, calculer la flèche au centre de la poutre à section variable, ainsi que les rotations aux extrémités.

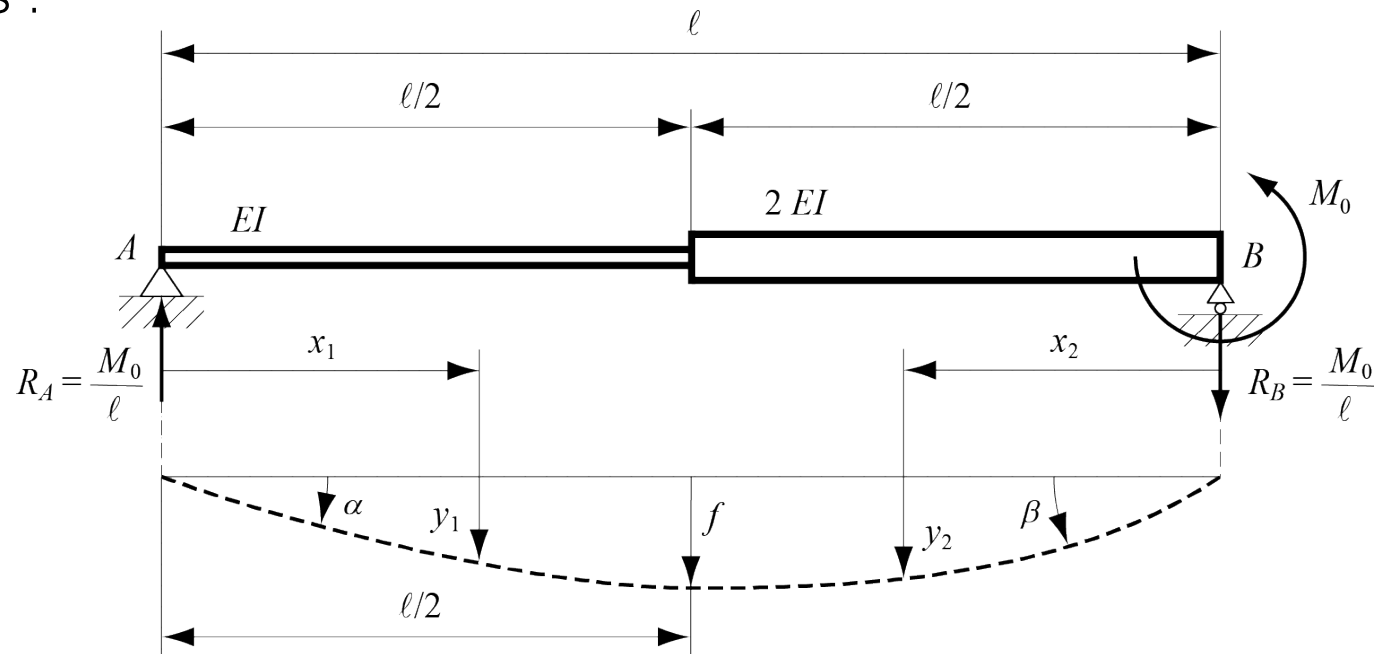
Données numériques :

$$E = 210 \text{ GPa}$$

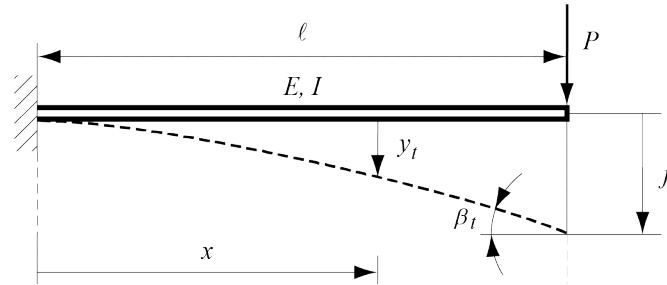
$$I = 250 \text{ cm}^4$$

$$M_0 = 20 \text{ kNm}$$

$$\ell = 1 \text{ m}$$



Mécanique des structures



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



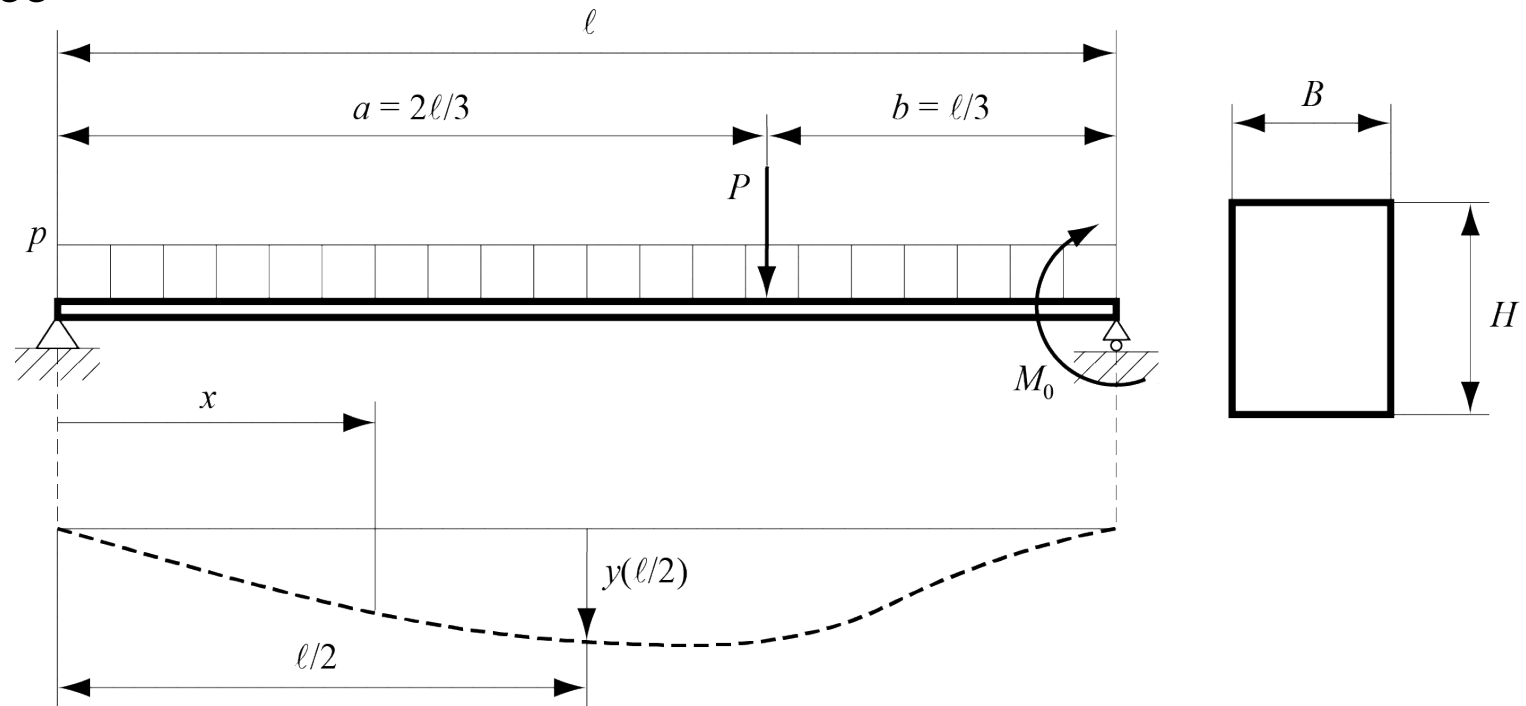
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.3

En appliquant le principe de superposition et en ne considérant que l'influence du moment de flexion, calculer la flèche au centre d'une poutre de section rectangulaire soumise au cas de charge suivant :

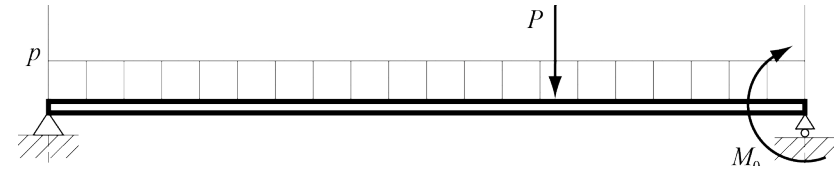
Données numériques

$$\begin{aligned} P &= 40 \text{ kN} \\ p &= 100 \text{ kN/m} \\ M_0 &= 12 \text{ kNm} \\ \ell &= 1 \text{ m} \\ H &= 10 \text{ cm} \\ B &= 5 \text{ cm} \\ E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$



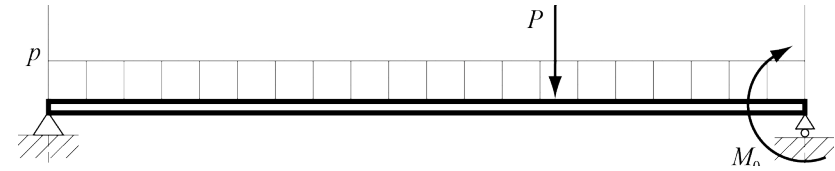
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.3



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.3



Conformément à l'annexe II, la déformée y_1 due à une charge concentrée P a pour expression

- $$y_1 = \frac{P}{6\ell EI} (2ab^2x + a^2bx - bx^3)$$

La prise en compte de la position de la charge ($a = 2\ell/3$, $b = \ell/3$) permet de récrire cette égalité sous la forme

- $$y_1 = \frac{P}{18 EI} \left(\frac{8}{9} \ell^2 x - x^3 \right)$$

La charge répartie p entraîne la déformée y_2 suivante, aussi donnée par l'annexe II,

- $$y_2 = \frac{p}{24 EI} (x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x)$$

Tandis que la déformée y_3 provoquée par le moment appliqué M_0 se déduit du résultat donné dans la même annexe après remplacement de la variable x par la quantité $\ell - x$ et inversion du signe de M_0

- $$y_3 = \frac{-M_0}{6\ell EI} (\ell^2 x - x^3)$$

En vertu du principe de superposition, la flèche au centre de la poutre a pour valeur

- $$f = y(\ell/2) = y_1(\ell/2) + y_2(\ell/2) + y_3(\ell/2)$$
$$= \frac{23}{1296} \frac{P \ell^3}{EI} + \frac{5}{384} \frac{p \ell^4}{EI} - \frac{1}{16} \frac{M_0 \ell^2}{EI}$$

Application numérique

Les données numériques fournies conduisent, d'après l'aire $F = B H = 50 \text{ cm}^2$ et l'inertie $I = B H^3 / 12 = 417 \text{ cm}^4$ de la section, à la flèche totale suivante

- $$f = 0,81 \text{ mm} + 1,49 \text{ mm} - 0,86 \text{ mm} = 1,44 \text{ mm}$$

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, calculer la flèche au centre de la poutre à section variable, ainsi que les rotations aux extrémités.

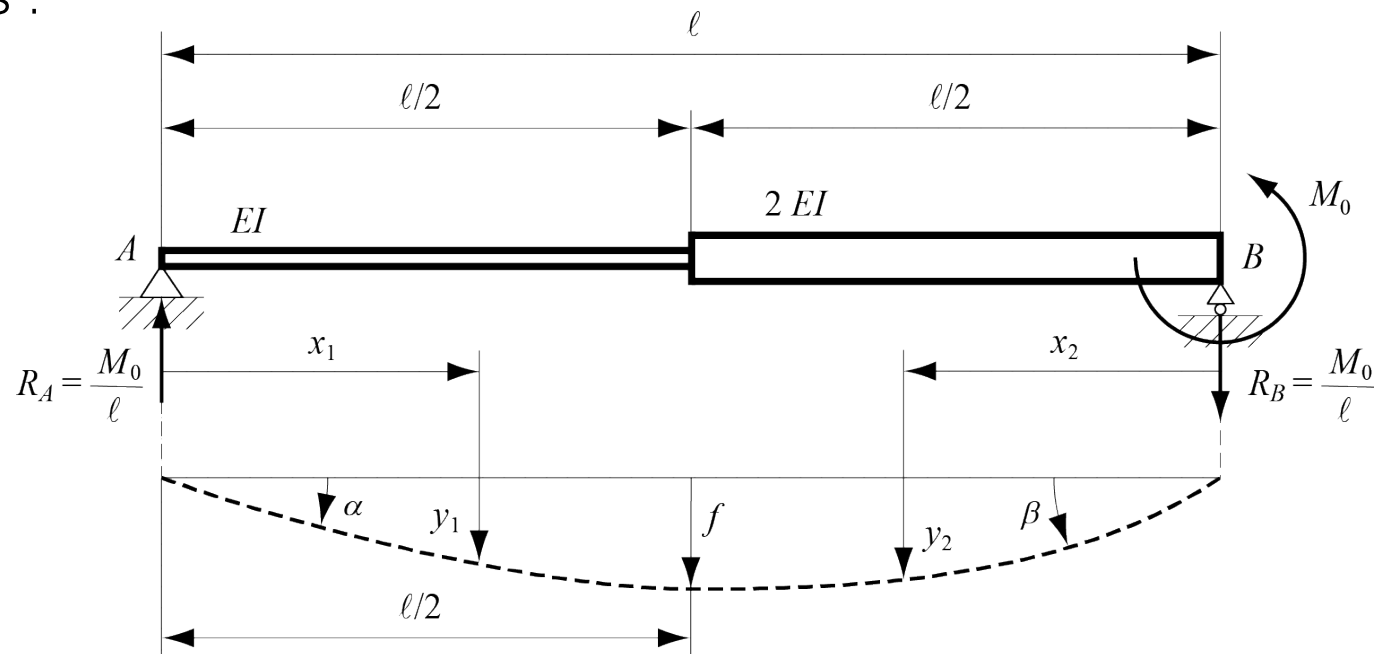
Données numériques :

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I = 250 \text{ cm}^4$$

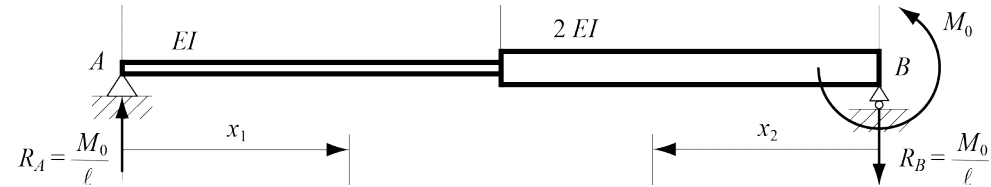
$$M_0 = 20 \text{ kNm}$$

$$\ell = 1 \text{ m}$$



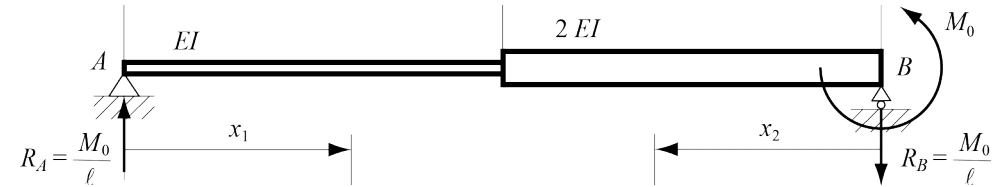
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4



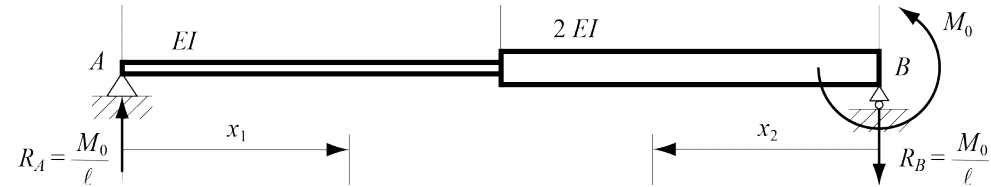
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4



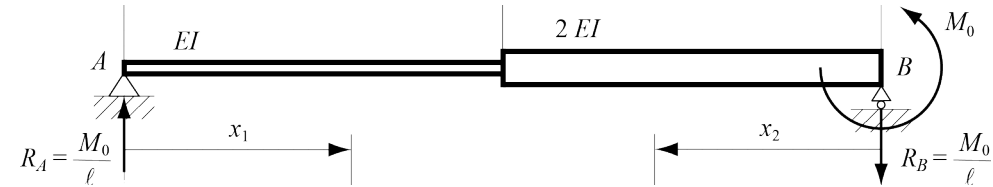
Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4



Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Problème 7.4



Comme la structure présente deux tronçons à section constante, séparons la déformée de la poutre en deux fonctions y_1 et y_2 devant satisfaire des conditions de compatibilité au point de discontinuité de la section.

Le moment de flexion M_1 relatif à la première moitié de la poutre ($0 < x_1 < \ell/2$)

- $M_1(x_1) = R_A x_1 = M_0 \frac{x_1}{\ell}$

L'équation différentielle associée à la déformée y_1 prend la forme suivante

- $EI y_1'' = -M_0 \frac{x_1}{\ell}$

L'intégration successive de cette équation permet d'écrire

- $EI y_1' = -M_0 \frac{x_1^2}{2\ell} + C_1$

- $EI y_1 = -M_0 \frac{x_1^3}{6\ell} + C_1 x_1 + C_2$

où C_1 et C_2 constituent les constantes d'intégration.

De manière analogue, le moment de flexion M_2 sur le deuxième tronçon ($0 < x_2 < \ell/2$)

- $M_2(x_2) = M_0 - R_B x_2 = M_0 \left(1 - \frac{x_2}{\ell}\right)$

L'intégration de l'expression différentielles entraîne successivement

- $2EI y_2'' = -M_0 \left(1 - \frac{x_2}{\ell}\right)$
- $2EI y_2' = -M_0 \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2\ell}\right) + D_1$
- $2EI y_2 = -M_0 \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6\ell}\right) + D_1 x_2 + D_2$

où D_1 et D_2 sont deux nouvelles constantes d'intégration. Ces quatre inconnues sont déterminées, d'une part, par les conditions aux limites aux extrémités de la poutre (déplacement nul au droit des appuis simples)

- $y_1(x_1 = 0) = 0 = C_2$
- $y_2(x_2 = 0) = 0 = C_2$

D'autre part, par la condition d'égalité des déformées et des pentes au point de discontinuité de la section ($x_1 = x_2 = \ell/2$)

- $y_1(x_1 = \ell/2) = \frac{-M_0 \ell^2}{48 EI} + C_1 \frac{\ell}{2 EI} = y_2(x_2 = \ell/2) = \frac{-5M_0 \ell^2}{96 EI} + D_1 \frac{\ell}{4 EI}$
- $y_1'(x_1 = \ell/2) = \frac{-M_0 \ell}{8 EI} + C_1 \frac{1}{EI} = y_2'(x_2 = \ell/2) = \frac{3M_0 \ell}{16 EI} - D_1 \frac{1}{2EI}$

Ce système de deux équations à deux inconnues a pour solution

- $C_1 = \frac{M_0 \ell}{8} \quad D_1 = \frac{3 M_0 \ell}{8}$

de sorte que les deux déformées et leurs dérivées peuvent être explicitées finalement sous les formes suivantes

- $y_1(x_1) = \frac{M_0}{24 \ell EI} (3 \ell^2 x_1 - 4 x_1^3) \quad 0 < x_1 < \ell/2$
- $y_1'(x_1) = \frac{M_0}{8 \ell EI} (\ell^2 - 4 x_1^2)$
- $y_2(x_2) = \frac{M_0}{48 \ell EI} (9 \ell^2 x_2 - 12 \ell x_2^2 + 4 x_2^3) \quad 0 < x_2 < \ell/2$
- $y_2'(x_2) = \frac{M_0}{16 \ell EI} (3 \ell^2 - 8 \ell x_2 + 4 x_2^2)$

La flèche f au centre de la poutre et les rotations α et β aux extrémités s'écrivent

- $f = y_1(\ell/2) = y_2(\ell/2) = \frac{M_0 \ell^2}{24 EI}$
- $\alpha = y_1'(0) = \frac{M_0 \ell}{8 EI}$
- $\beta = -y_2'(0) = -\frac{3 M_0 \ell}{16 EI}$

Application numérique

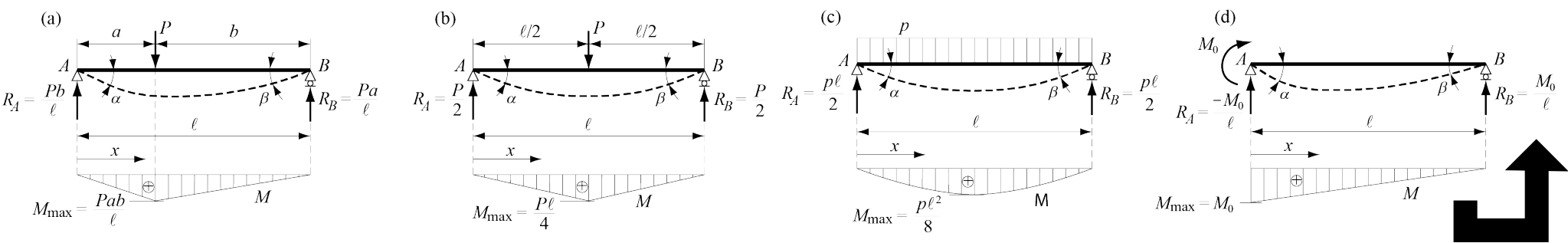
Avec les grandeurs numériques données, la flèche f et les rotations α et β valent

- $f = 1,6 \text{ mm}$
- $\alpha = 0,0048 \text{ rad} = 0,27^\circ$
- $\beta = -0,0071 \text{ rad} = -0,41^\circ$

Annexe IV

Flèches et rotations de quelques poutres droites en flexion simple sur appuis simple

Cas de charge	Ligne élastique $y(x)$	Flèche maximale f	Position de la flèche x	Rotation aux extrémités α β	
(Ia) $(0 \leq x \leq a)$	$y = \frac{P}{6\ell EI} (2ab^2x + a^2bx - bx^3)$	—	$a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}}$ si $a > b$	$\frac{Pab(\ell + b)}{6\ell EI}$	—
(Ia) $(a \leq x \leq \ell)$	$y = \frac{P}{6\ell EI} [2a^2b(\ell - x) + ab^2(\ell - x) - a(\ell - x)^3]$	—	$\ell - b\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}}$ si $a < b$	—	$\frac{-Pab(\ell + a)}{6\ell EI}$
(Ib) $(a \leq x \leq \ell/2)$	$y = \frac{P}{48EI} (3\ell^2x - 4x^3)$	$\frac{P\ell^3}{48EI}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{P\ell^2}{16EI}$	$-\frac{P\ell^2}{16EI}$
(Ic)	$y = \frac{p}{24EI} (x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3x)$	$\frac{5p\ell^4}{384EI}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{P\ell^3}{24EI}$	$-\frac{P\ell^3}{24EI}$
I(d)	$y = \frac{M_0}{6\ell EI} (x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^2x)$	$\frac{M_0\ell^2\sqrt{3}}{27EI}$	$\ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{M_0\ell}{3EI}$	$-\frac{M_0\ell}{6EI}$



Annexe IV

Flèches et rotations de quelques poutres droites encastrée en flexion simple

Cas de charge	Ligne élastique $y(x)$	Flèche maximale	Position de la flèche	Rotation aux extrémités	
		f	x	α	β
II(a)	$y = \frac{P}{6EI}(3\ell x^2 - x^3)$	$\frac{P\ell^3}{3EI}$	ℓ	0	$\frac{P\ell^2}{2EI}$
II(b)	$y = \frac{p}{24EI}(6\ell^2 x^2 - 4\ell x^3 + x^4)$	$\frac{p\ell^4}{8EI}$	ℓ	0	$\frac{p\ell^3}{6EI}$
II(c)	$y = \frac{-M_0}{2EI}x^2$	$\frac{-M_0\ell^2}{2EI}$	ℓ	0	$\frac{-M_0\ell}{EI}$

